В.Н. ЕРШОВ

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ В РАЗЛИЧНЫХ СРЕДАХ ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

Нижний Новгород
2010

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОУ ВПО «ВОЛЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ИНЖЕНЕРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

В.Н. ЕРШОВ

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ В РАЗЛИЧНЫХ СРЕДАХ ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

Методические рекомендации к выполнению курсовой работы по информатике для студентов специальности 080801.65 – Прикладная информатика (в менеджменте)

Нижний Новгород
2010

ББК 32.973-018

Е80

Ершов В.Н.

Е80 Компьютерное моделирование вычислительных задач в различных средах программного обеспечения: Методические рекомендации к выполнению курсовой работы по информатике.- Н.Новгород; ВГИПУ, - 2010.- 19 с.

Рецензенты: Владыкин А.В. – кандидат технических наук, доцент кафедры «Высшей математики» Нижегородского государственного технического университета им. Р. Е. Алексеева.

Самерханова Э.К. – доктор педагогических наук, профессор, зав. кафедрой математики и информатики Волжского государственного инженерно-педагогического университета.

Методические рекомендации «Компьютерное моделирование вычислительных задач в различных средах математического обеспечения» содержат постановку курсовой работы по информатике, краткое описание используемых методов на примере решения нелинейного уравнения с одной неизвестной и анализом полученных результатов, варианты заданий для самостоятельного выполнения.

Приведена реализация конкретного варианта задания в трех программных средах: Pascal, Excel, MathCAD.

Методические рекомендации предназначены для студентов специальности 080801.65 – Прикладная информатика (в менеджменте). Могут быть использованы студентами других специальностей при изучении курса информатики.

ББК 32.973-018

Введение

В настоящее время появилось значительное число различных программных продуктов (MathCad, Mathlab и т.д.), с помощью которых, задавая только входные данные и не вникая в сущность алгоритмов, можно решить значительное число задач. Безусловно, умение пользоваться этими программными продуктами существенно сокращает время и ресурсы по решению ряда важных задач.

Зачастую решение некоторых задач сводится к решению достаточно сложных нелинейных уравнений, которые могут представлять собой самостоятельную задачу или являться составной частью более сложных задач. Корни таких уравнений сравнительно редко удается найти точными методами. Кроме того, в некоторых случаях коэффициенты уравнения, полученные в процессе эксперимента или как результаты предварительных расчетов, известны лишь приблизительно. Значит, сама задача о точном определении корней уравнения теряет смысл и важное значение приобретают способы приближенного нахождения корней уравнения и оценки степени их точности. При традиционном подходе к изучению численных методов в основном в математических курсах ориентируются на стандартные ручные расчеты. С развитием материальной и программной базы современных компьютеров при принятии тех или иных решений более реалистичным представляется подход численных расчетов при использовании новейших информационных технологий.

В представленной работе на примере решения нелинейного уравнения с одной неизвестной $f(x)=x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}-2.5$ реализуются 3 технологии:

- алгоритмический подход на базе программной среды Pascal;
- с использованием табличного процессора Excel;
- на основе пакета формульных преобразований MathCAD.

Делается сравнительный анализ полученных результатов.

1. Постановка задачи

Пусть дано уравнение f (x)=0, (1)

где функция f (x) непрерывна на некотором множестве X.

Совокупность значений переменной x, при которых уравнение (1) обращается в тождество, называется решением этого уравнения, а каждое отдельное значение – корнем уравнения. В зависимости от вида функции f(x) уравнения подразделяются на алгебраические и трансцендентные.

В первых для получения значения функции по аргументу необходимо выполнить арифметические операции и возведение в степень с рациональным показателем (иррациональные функции, где используется операция извлечения корня, также относят к классу алгебраических функций).

Алгебраическое уравнение можно привести к виду:

$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots+a_{n-1}x+a_n=0$, (2) где числа a_i , $i=\overline{1,n}$ - коэффициенты уравнения, которые в общем случае являются комплексными.

Таким образом, корни уравнения могут быть как вещественными, так и комплексными. Будем считать числа a_i вещественными.

Функцию называют трансцендентной, если она содержит логарифмические, показательные, тригонометрические и другие функции. И если в записи уравнения (1) содержится трансцендентная функция, то уравнение называют трансцендентным.

Точные аналитические значения корней уравнения (1) можно найти лишь в простейших случаях ($ax+в=0$; $ax^2+вx+c=0$; $\cos(x)=a$ и т.д.). Кроме того, коэффициенты некоторых уравнений есть приближенные числа, поэтому нельзя говорить о нахождении точных корней.

Будем считать, что уравнение (1) имеет только действительные корни. Тогда нахождение корней с заданной точностью необходимо проводить в два этапа:

– отделение корней, т.е. нахождение достаточно малых промежутков, в которых содержится только один корень уравнения;

– уточнение каждого из отдельных корней, т.е. определение их с заданной точностью.

Рассмотрим технологию выполнения курсовой работы на примере определения корней уравнений $x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}-2.5=0$ на интервале $x\in[0;1]$.

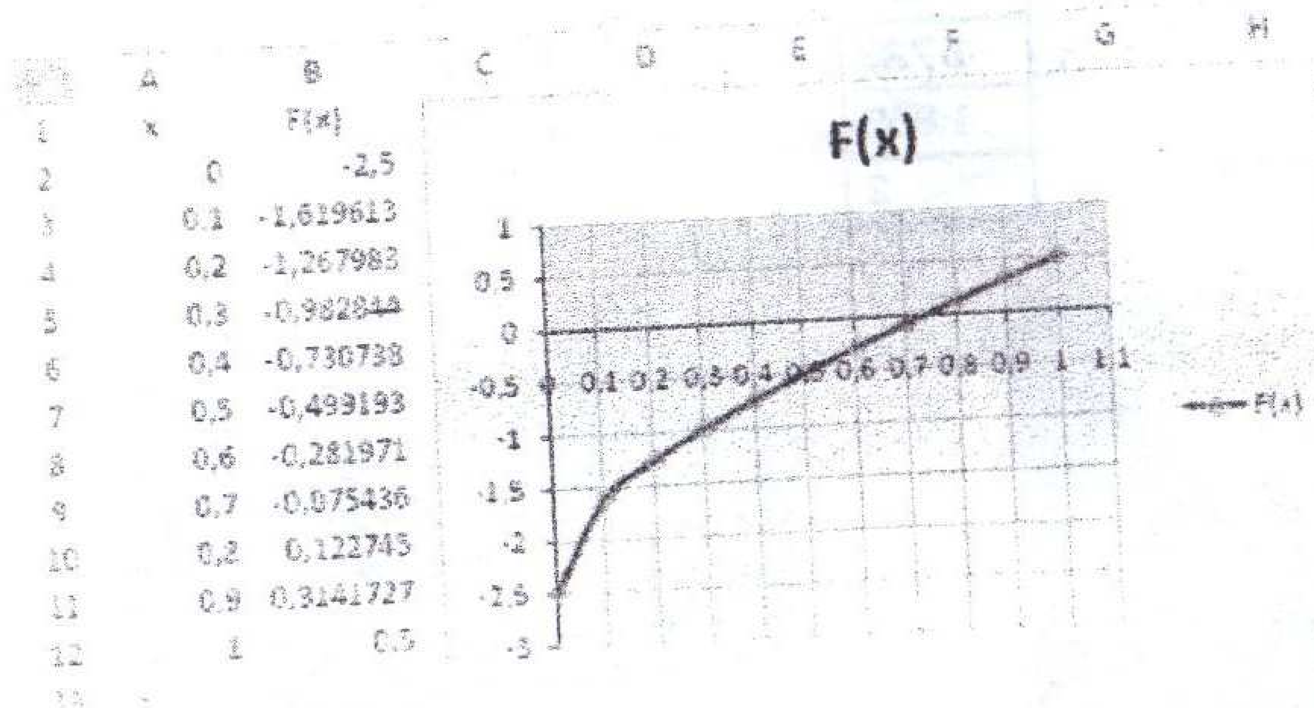
2. Методы отделения (локализации) корней

2.1. Графический метод

Он основан на построении графика функции y=f(x). Тогда искомым отрезком [a;b], содержащим корень уравнения (1), будет отрезок оси абсцисс, содержащий точку пересечения графика с этой осью. Иногда выгоднее представить исходную функцию в виде разности двух более простых функций f(x)=g(x)-g1(x) и строить два графика y_1 = g(x) и y_2 = g1(x), точка пересечения которых и является корнем уравнения (1), а отрезок на оси абсцисс с корнем внутри и будет являться интервалом изоляции. Этот метод хорошо работает в случае, если исходное уравнение не имеет близких корней и дает тем точнее результат, чем мельче берется сетка по оси OX.

Пакет Excel

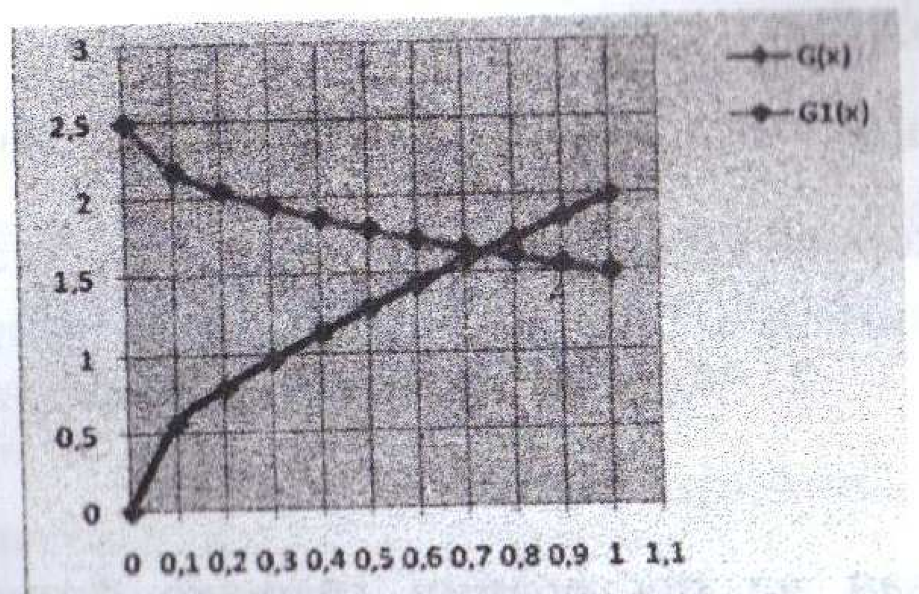
Первый способ $f(x) = x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}-2.5$



x	F(x)
0	-2,5
0,1	-1,619613
0,2	-1,267983
0,3	-0,982844
0,4	-0,730738
0,5	-0,499193
0,6	-0,281971
0,7	-0,075436
0,8	0,122745
0,9	0,3141727
1	0,5

Второй способ $g(x) = x+\sqrt[3]{x}$; $g1(x) = 2.5 - \sqrt{x}$

15	x	G(x)	G1(x)
16	0	0	2,5
17	0,1	0,5641589	2,1837722
18	0,2	0,7848035	2,0527864
19	0,3	0,969433	1,9522774
20	0,4	1,1368063	1,8675445
21	0,5	1,2937005	1,7928932
22	0,6	1,4434327	1,7254033
23	0,7	1,587904	1,66334
24	0,8	1,7283178	1,6055728
25	0,9	1,8654894	1,5513167
26	1	2	1,5



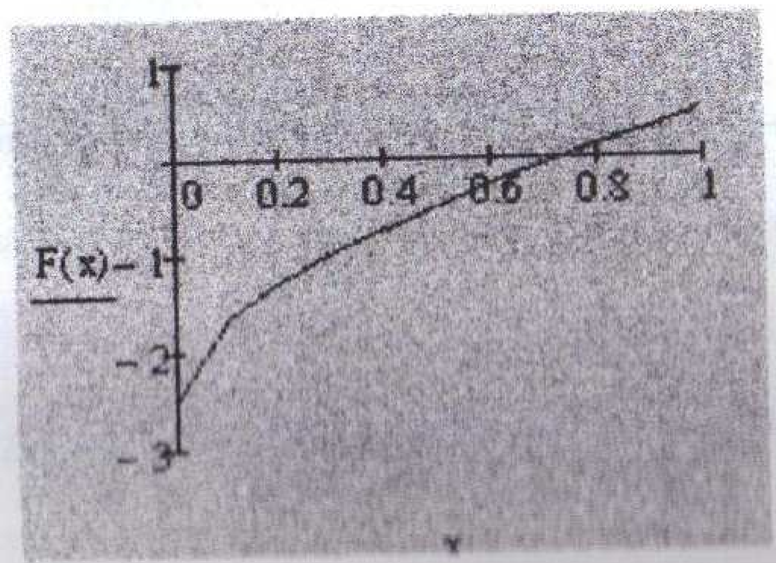
Искомый корень уравнения находится на отрезке [0,7;0,8]

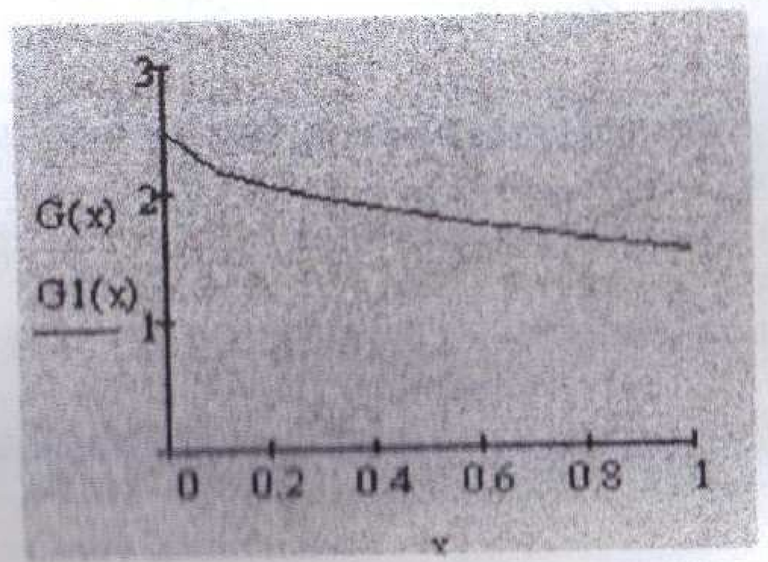
Пакет MathCAD

$x := 0, 0.1 .. 1$

$F(x) := x + x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}} - 2.5 \quad G(x) := x + x^{\frac{1}{3}} \quad G1(x) := 2.5 - x^{\frac{1}{2}}$

x =	F(x) =	G(x) =	G1(x) =
0	-2.5	0	2.5
0.1	-1.62	0.564	2.184
0.2	-1.268	0.785	2.053
0.3	-0.983	0.969	1.952
0.4	-0.731	1.137	1.868
0.5	-0.499	1.294	1.793
0.6	-0.282	1.443	1.725
0.7	-0.075	1.588	1.663
0.8	0.123	1.728	1.606
0.9	0.314	1.865	1.551
1	0.5	2	1.5





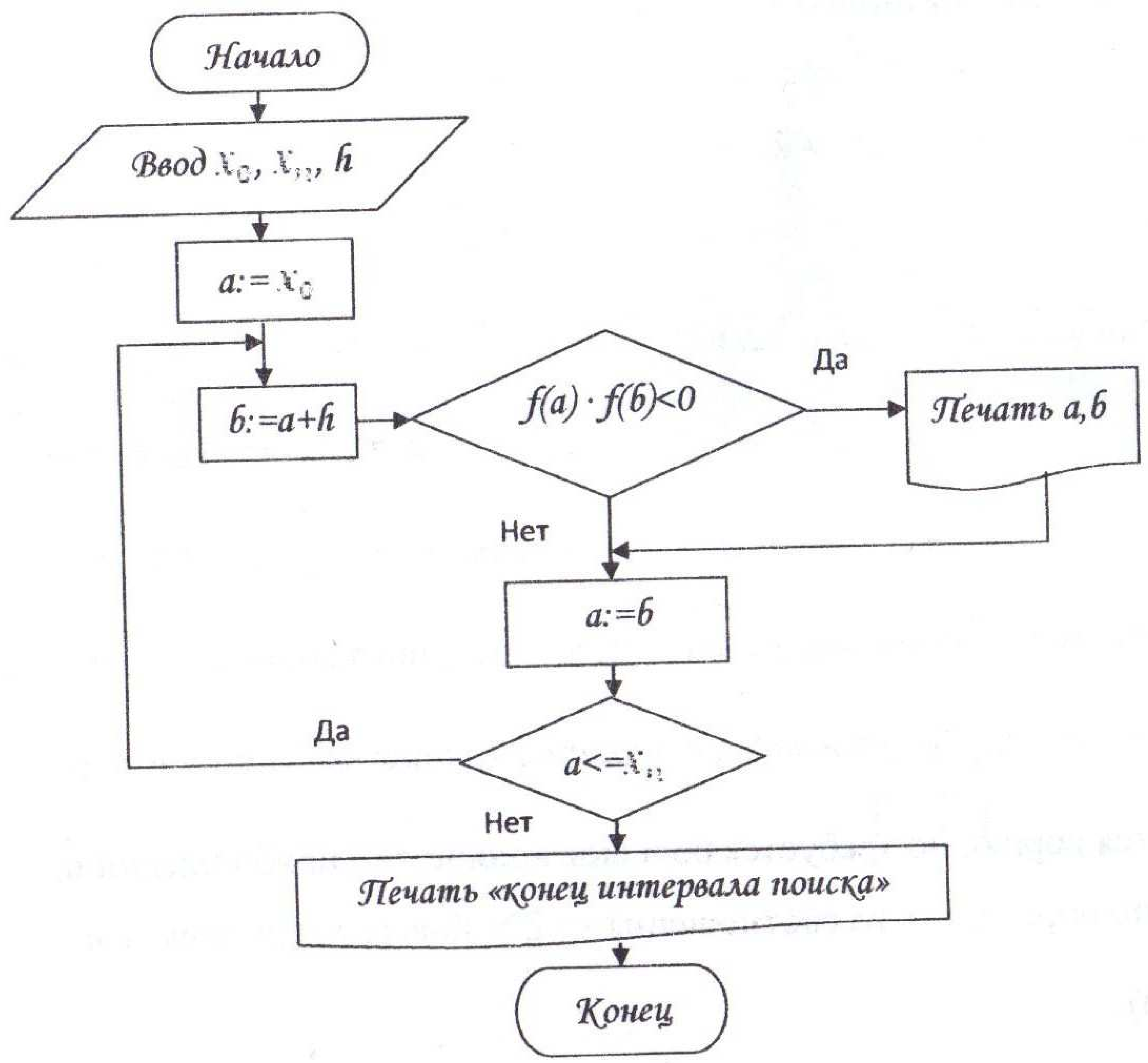
2.2. Аналитический метод

Аналитический метод основан на следующем. Если непрерывная и дифференцируемая на отрезке [a;b] функция f(x) принимает значения разных знаков на его концах (т.е. $f(a)\cdot f(b)<0$), то внутри данного отрезка содержится, по крайней мере, один корень уравнения (1). А если к тому же на [a;b] f'(x) сохраняет знак (функция f(x) – монотонная), то этот корень единственный.

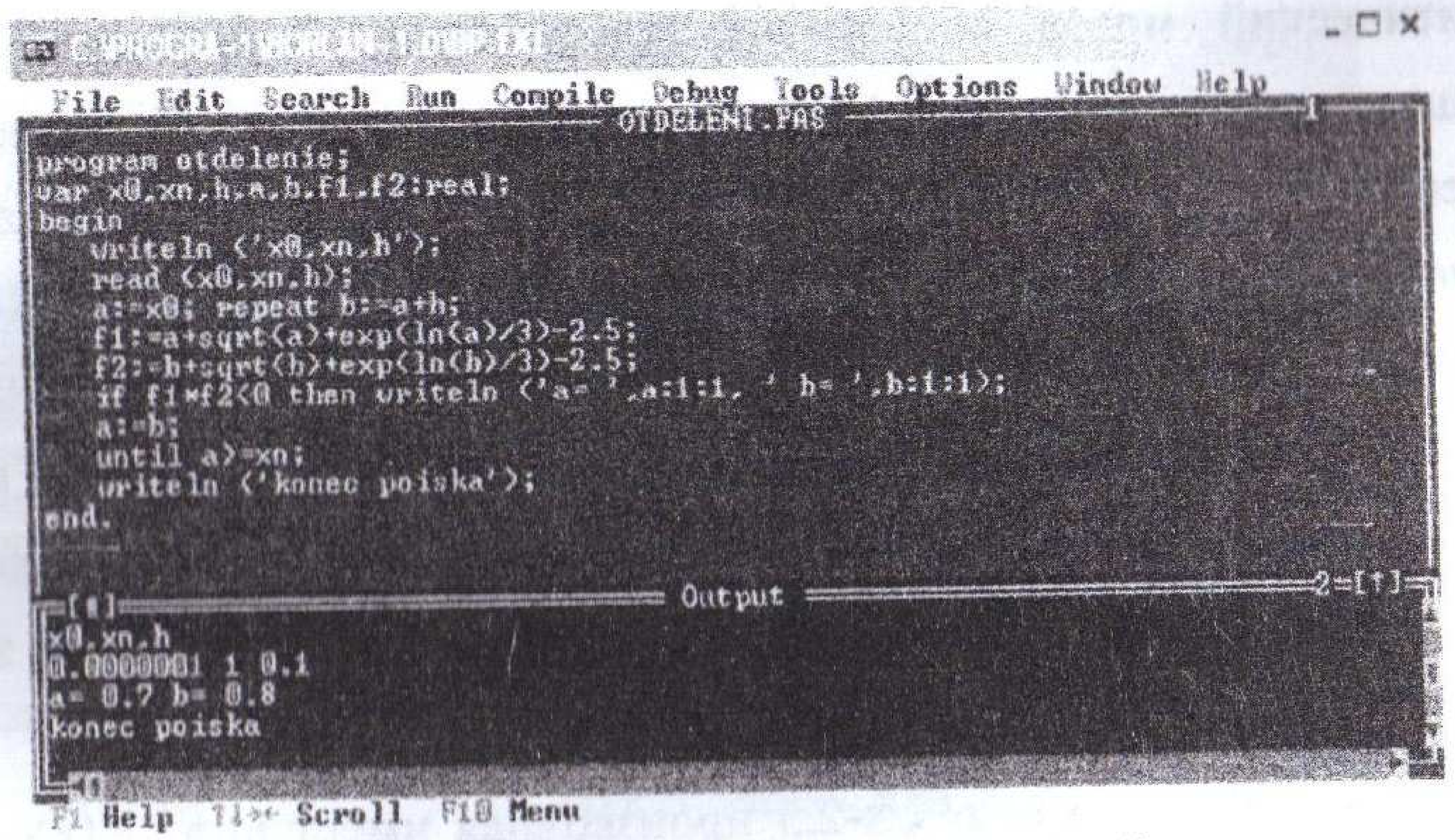
Если исходное уравнение имеет близкие корни или функция f(x) сложная, то для выделения отрезков изоляции область изменения аргумента разбивают на отрезки длиной h (шаг) и последовательно проходят их, проверяя значение функции на их концах и выбирая нужные.

Для функции $F(x) = x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}-2.5$ производная имеет вид $F'(x)=1+\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}+\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}$ Областью допустимых значений аргумента для производной является интервал (0; +∞). При таких значениях аргумента функция F'(x) всегда положительна, следовательно, уравнение имеет единственный корень.

Блок-схема



Pascal



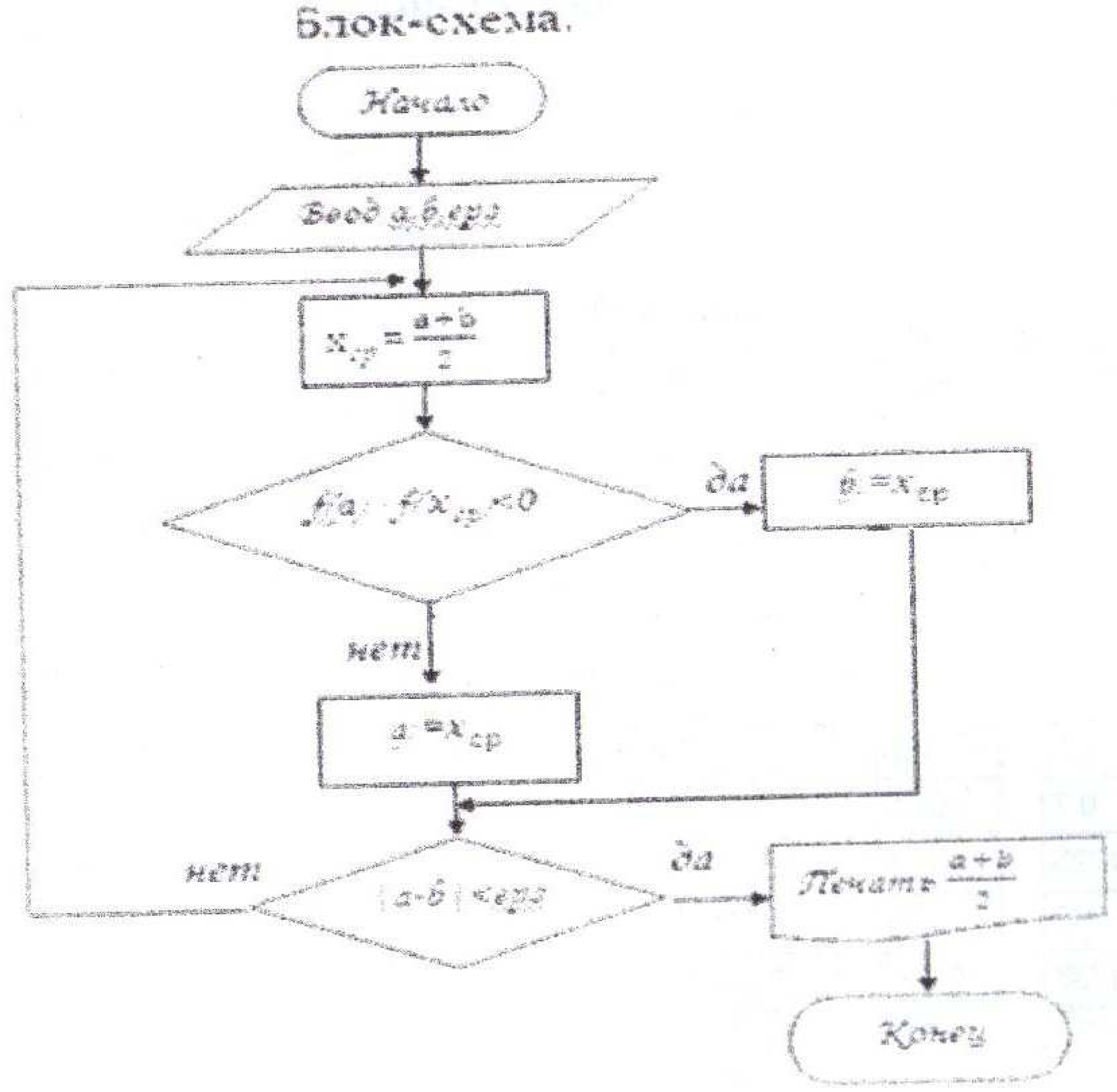
3. Методы уточнения корней

Методы отделения корней весьма удобны и просты. Однако они дают ответ только на вопрос локализации корня и позволяют найти его грубое приближенное значение. Если же требуется найти более точное значение корня, то используют различные методы уточнения.

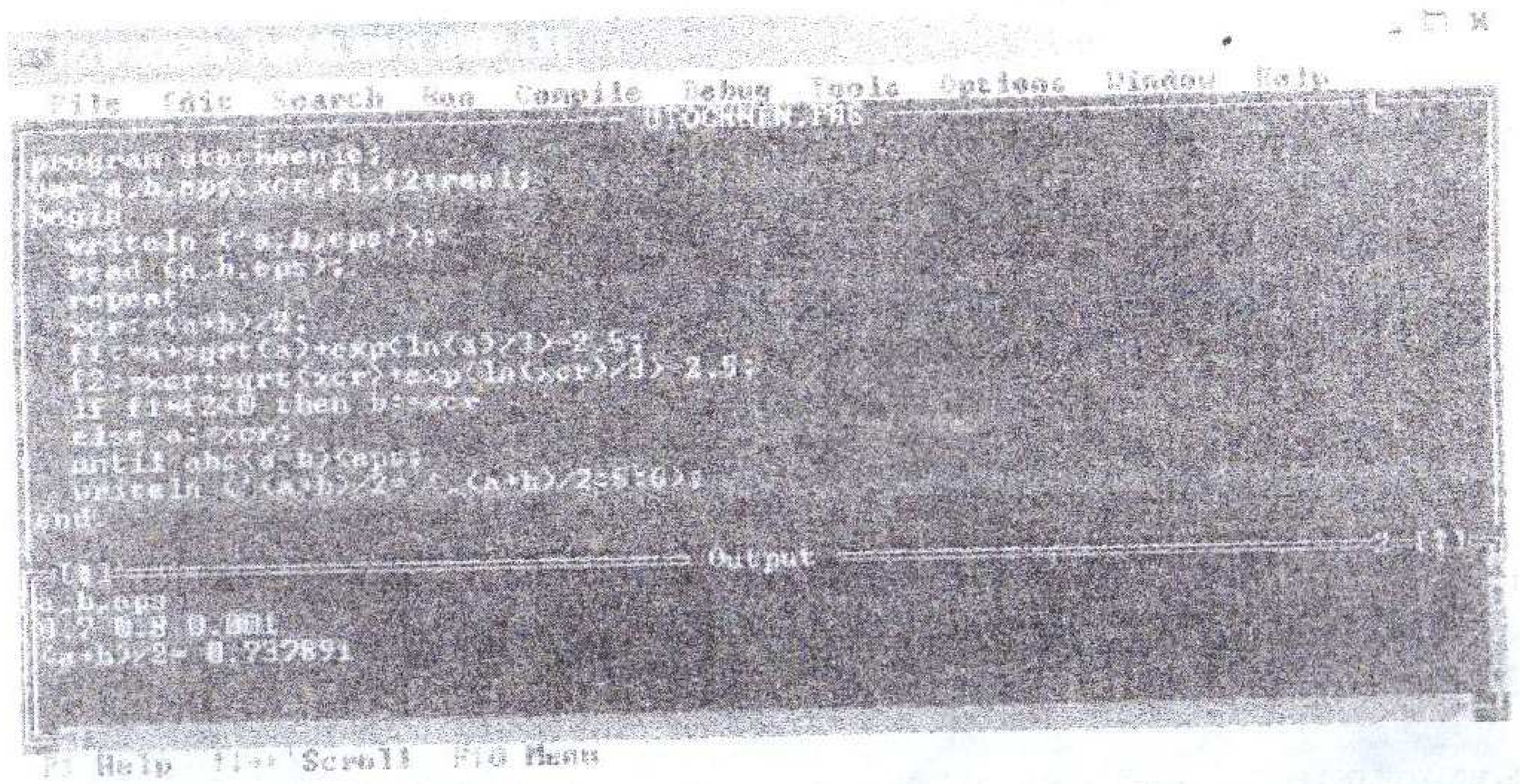
3.1. Метод половинного деления

Входная информация: отрезок [a;b] с корнем непрерывной функции f(x) внутри и точность определения корня ε.

Исходный отрезок делится пополам точкой $x_{cp} = \frac{a+b}{2}$ и если $f(x_{cp})=0$, то x – корень уравнения. Если $f(x_{cp})\neq 0$, то из двух получившихся отрезков [a; x_{cp}] и [x_{cp};b] выбирается тот, на концах которого функция имеет противоположные знаки. (Например, если $f(a) \cdot f(x_{cp})<0$, то выбирается [a; x_{cp}]; если нет, то [x_{cp};b]). Продолжаем процедуру деления до тех пор, пока $|a-b|< \varepsilon$. Тогда последнее значение x_{cp} будет искомым корнем с точностью ε. Этот метод всегда сходится корню, но требуется большое количество приближений n, которое можно определить из соотношения $\varepsilon \cdot 2^n= |b-a|$ (т.к. при $|b-a|=1$ и $\varepsilon=0.001$, n=10).



Pascal



Пакет Excel

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Метод половинного деления						
2	a	x	b	f(a)	f(x)	f(a)*f(x)	|a-b|<ε	ε= 0.001
3	0,7000	0,75000	0,80000	-0,07544	0,02459	-0,00185465		
4	0,7000	0,72500	0,75000	-0,07544	-0,02518	0,00189946		
5	0,7250	0,73750	0,75000	-0,02518	-0,00024	0,00000598		
6	0,7375	0,74375	0,75000	-0,00024	0,01219	-0,00000289		
7	0,7375	0,74063	0,74375	-0,00024	0,00598	-0,00000142		
8	0,7375	0,73906	0,74063	-0,00024	0,00287	-0,00000068		
9	0,7375	0,73828	0,73906	-0,00024	0,00132	-0,00000031		
10	0,7375	0,73789	0,73828	-0,00024	0,00054	-0,00000013	корень	

Пакет MathCAD

$f(x) := x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - 2.5$

$xc(a,b) := \frac{a+b}{2}$

$int(a,b) := if\left[f(a)\cdot f(xc(a,b)) < 0, \begin{pmatrix} a \\ xc(a,b) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} xc(a,b) \\ b \end{pmatrix}\right]$

$a_0 := 0.7 \qquad b_0 := 0.8$

$i := 0..6 \qquad \begin{pmatrix} a_{i+1} \\ b_{i+1} \end{pmatrix} := int(a_i, b_i)$

i =	a_i =	b_i =	$f(a_i)$ =	$f(b_i)$ =
0	0.7	0.8	-0.075	0.123
1	0.7	0.75	-0.075	0.025
2	0.725	0.75	-0.025	0.025
3	0.738	0.75	$-2.374\cdot10^{-4}$	0.025
4	0.738	0.744	$-2.374\cdot10^{-4}$	0.012
5	0.738	0.741	$-2.374\cdot10^{-4}$	$5.979\cdot10^{-3}$
6	0.738	0.739	$-2.374\cdot10^{-4}$	$2.872\cdot10^{-3}$

$xc(a,b) = \begin{pmatrix} 0.75 \\ 0.725 \\ 0.738 \\ 0.744 \\ 0.741 \\ 0.739 \\ 0.738 \\ 0.738 \end{pmatrix}$

3.2. Метод последовательных приближений

Исходное уравнение $F(x) = x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}-2.5$ преобразуем к виду $x = \varphi(x)$. Если на рассматриваемом интервале изоляции корня [0.7; 0,8] $|\varphi'(x)|<1$, то расчетная формула примет вид : $x_{i+1}=\varphi(x_i)$, и при этом итерационный процесс приближения к корню будет сходящимся.

В нашем случае непосредственный выбор расчетной формулы вызывает затруднения. Поэтому воспользуемся следующим приемом.

Введем в рассмотрение произвольный параметр $\lambda>0$. Тогда функцию $\varphi(x)$ можно представить как $\varphi(x) = x - \lambda\cdot F(x)$. Затем, варьируя параметр λ, добиваемся условия сходимости: $|\varphi'(x)|<1$ на [a;b]. $\varphi'(x)=1-\lambda\cdot F'(x)$. Для выполнения сходимости $\lambda=\frac{1}{\max|F'(x)|}$ на [a; b].

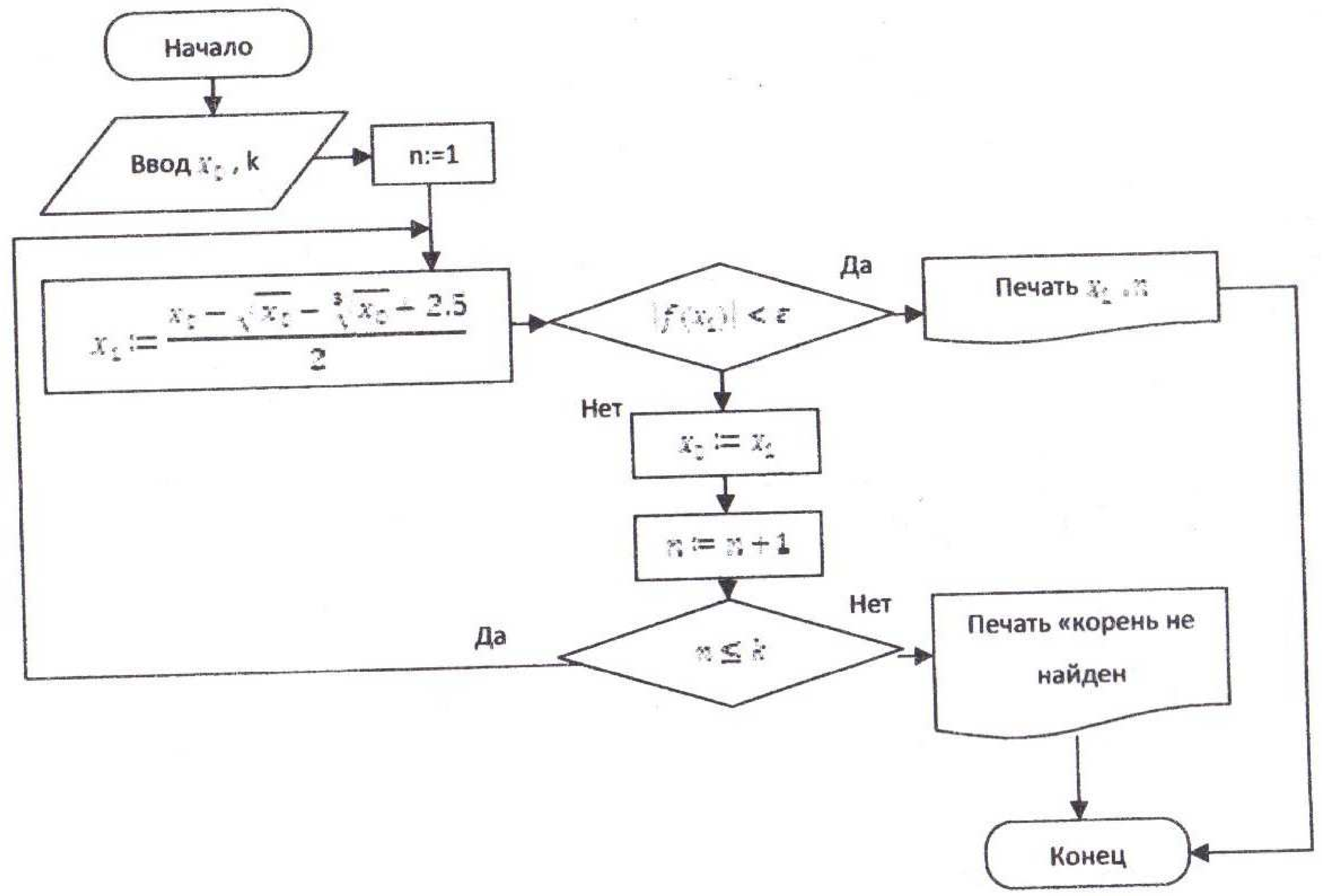
Для рассматриваемого примера:

$\max|F'(x)|$ на (a; b) = $\max|\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)|= 2$ (при x=0,7) и $\lambda = \frac{1}{2}$.

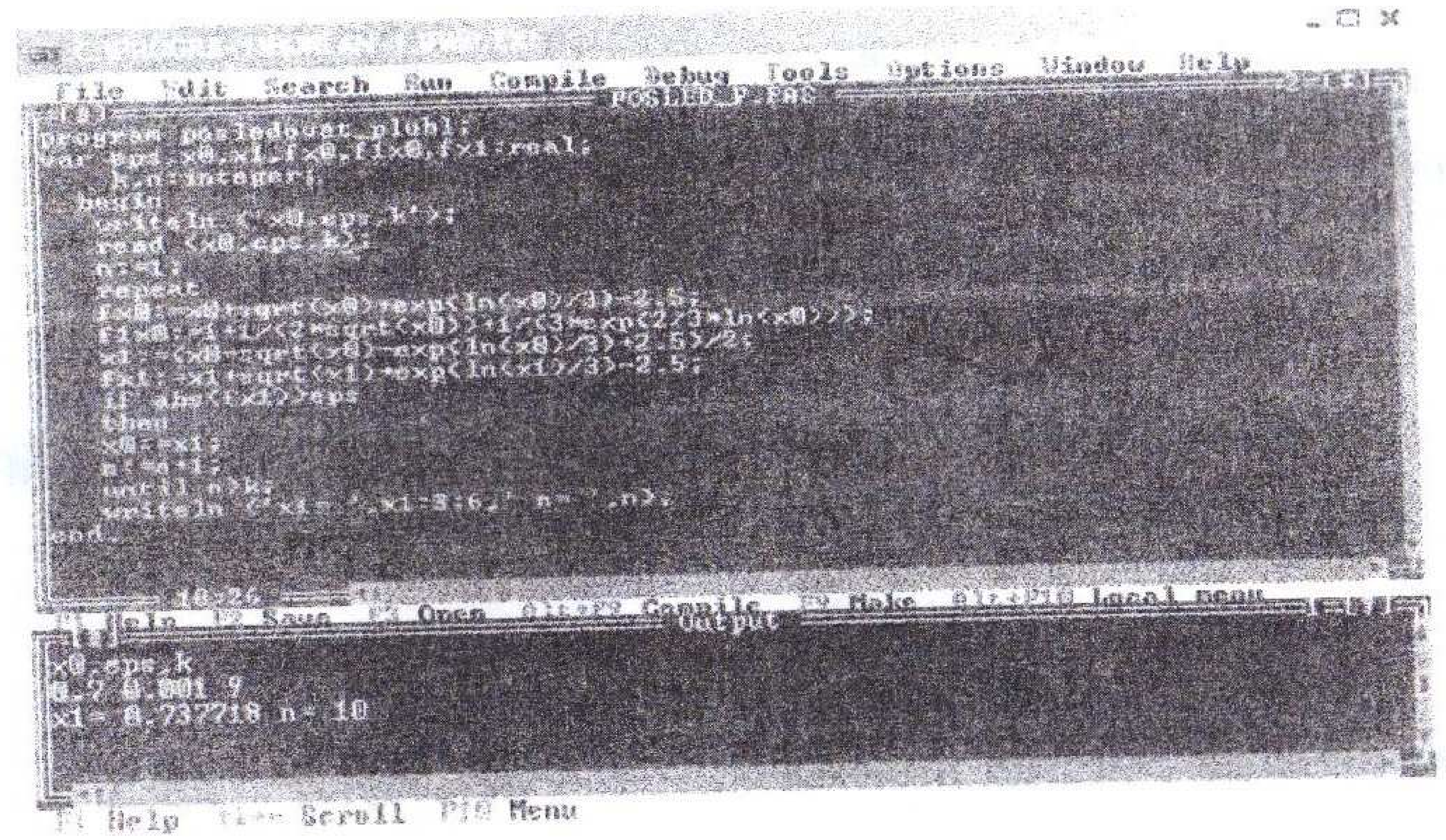
Расчетная формула метода итерации примет вид:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{1}{2}\cdot(x_i+\sqrt{x_i}+\sqrt[3]{x_i}-2.5) = \frac{x_i-\sqrt{x_i}-\sqrt[3]{x_i}+2.5}{2}.$$

Блок-схема



Pascal



Пакет Excel

	A	B	C	D	E
1	Метод последовательных приближений				
2	Xi	F(Xi)	|F(Xi)|<ε		ε= 0,001
3	0,70000	-0,07544			
4	0,73772	0,00020	корень		

Пакет MathCAD

$f(x) := x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - 2.5$

$x_0 := 0.7$

$i := 0..6$

$$x_{i+1} := \frac{x_i - \sqrt{x_i} - \sqrt[3]{x_i} + 2.5}{2}$$

$i =$	$x_i =$	$f(x_i) =$
0	0.7	-0.075
1	0.738	$1.965 \cdot 10^{-4}$
2	0.738	$9.386 \cdot 10^{-7}$
3	0.738	$4.465 \cdot 10^{-9}$
4	0.738	$2.124 \cdot 10^{-11}$
5	0.738	$1.013 \cdot 10^{-13}$
6	0.738	0

3.3. Метод Ньютона

Этот метод можно рассматривать как частный случай метода простой итерации с рекуррентной формулой $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$ и тем же принципом выбора начального приближения x_0.

Последовательность x_i является сходящейся, ибо $\varphi'(x) = \frac{f(x) \cdot f''(x)}{(f'(x))^2}$ и $\varphi'(x)=0$. Что означает, что если x_0 выбрано из малой окрестности корня, то $\varphi'(x) \le 1$. При произвольном x_0 итерации будут сходиться, если всюду

$|f(x) * f''(x)| < (f'(x))^2$.

Геометрически метод Ньютона соответствуют последовательному проведению касательных к кривой $y = f(x)$ в точках $(x_i;\ f(x_i))$ и выборе в качестве нового приближения x_{i+1} точки пересечения их с осью абсцисс.

Для рассматриваемого нами примера ($F(x) = x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}-2.5$) первая производная равна $F'(x)=1+\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}+\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}$, а вторая производная имеет вид

$F''(x) = -\frac{1}{4\cdot\sqrt{x^3}} - \frac{1}{9\cdot\sqrt[3]{x^5}}$.

Итерационная формула примет вид:

$$x_{i+1}=x_i-\frac{x_i+\sqrt{x_i}+\sqrt[3]{x_i}-2.5}{1+\frac{1}{2\cdot\sqrt{x_i}}+\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x_i^2}}}.$$

В качестве начального приближения x_0 берется тот конец интервала изоляции, на котором функция и её вторая производная имеют одинаковые знаки. Найдем их значения на левом конце отрезка [0,7; 0,8]:

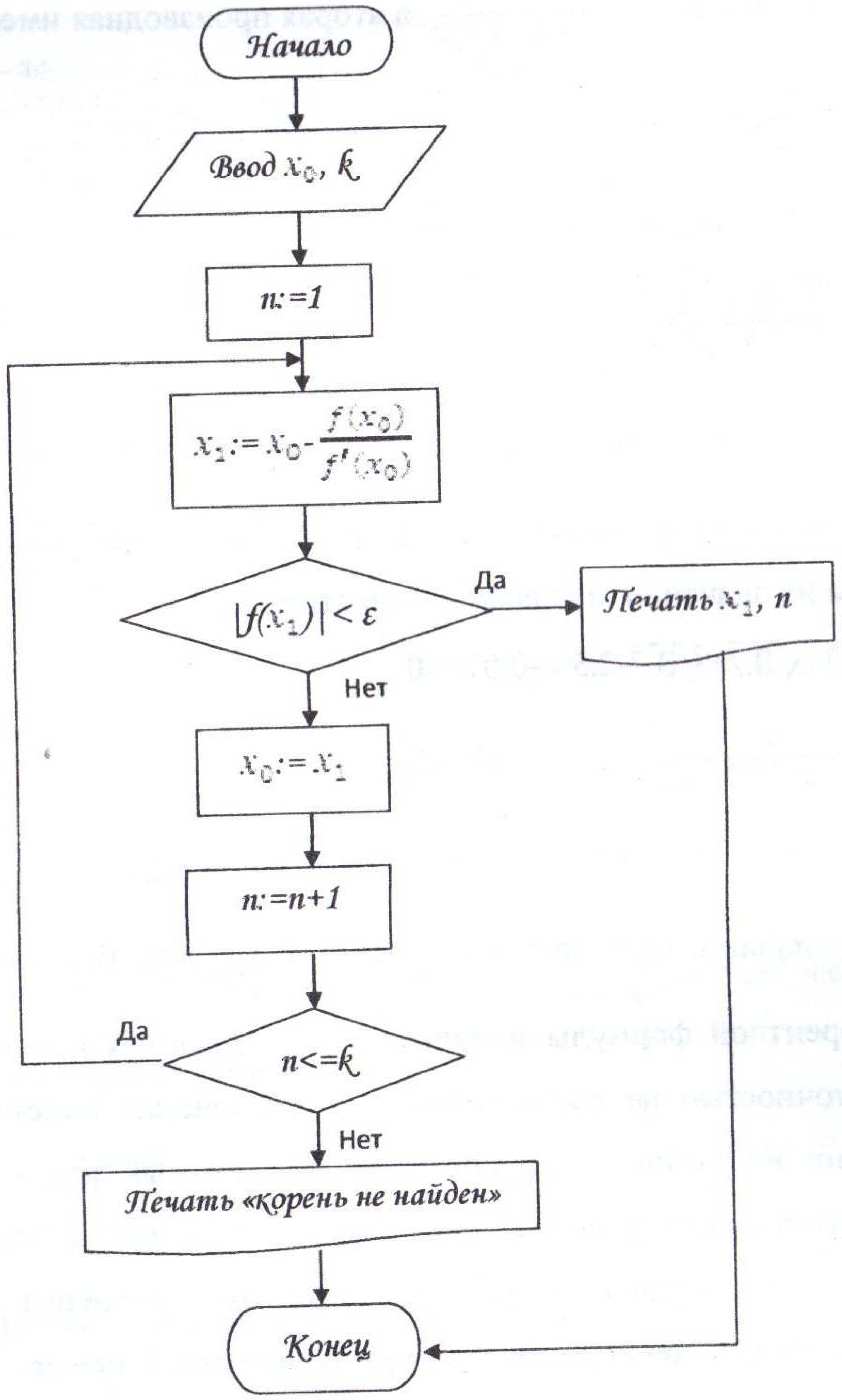
$F(0,7)=0.7+\sqrt{0.7}+\sqrt[3]{0.7}-2.5\approx -0,075<0$;

$F''(0,7)= -\frac{1}{4\cdot\sqrt{0.7^3}} - \frac{1}{9\cdot\sqrt[3]{0.7^5}} \approx -0,6282<0$.

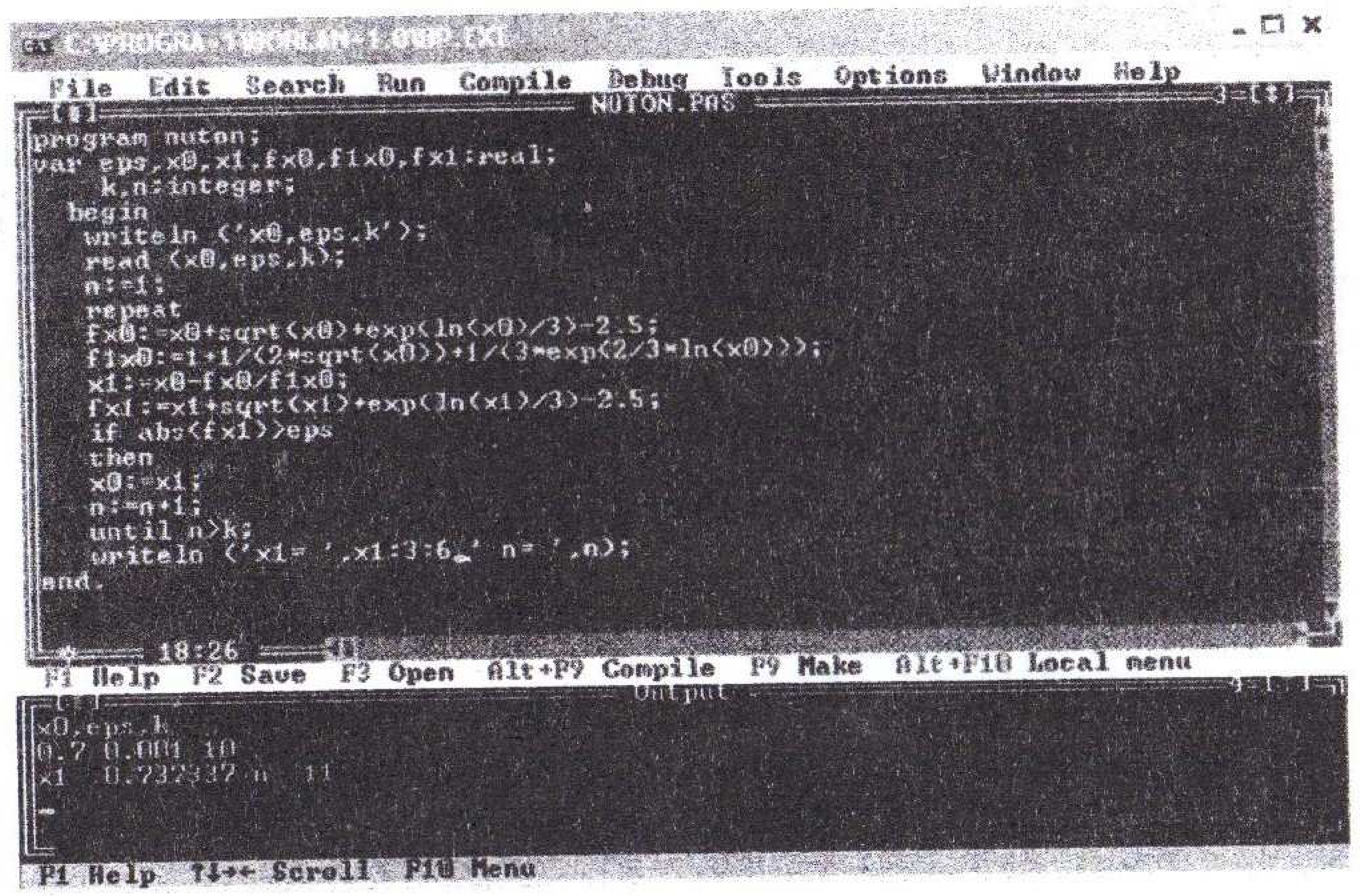
Таким образом, за начальное приближение примем $x_0=0.7$.

Процесс итерации идет до тех пор, пока $|F(x_{i+1})|<\varepsilon$. В случае неудачного выбора рекуррентной формулы получается расходящийся процесс и условие сравнения с точностью не достигается. Для исключения подобной ситуации введем счетчик итерации n, увеличивающийся каждый раз на единицу, и поставим искусственное условие продолжения итерации в случае n<=k. В противном случае завершим алгоритм с выводом текстового сообщения о невозможности получения корня за заданное количество k шагов.

Блок-схема



Pascal



```
program nuton;
var eps,x0,x1,fx0,f1x0,fx1:real;
    k,n:integer;
  begin
   writeln ('x0,eps,k');
   read (x0,eps,k);
   n:=1;
   repeat
   fx0:=x0+sqrt(x0)+exp(ln(x0)/3)-2.5;
   f1x0:=1+1/(2*sqrt(x0))+1/(3*exp(2/3*ln(x0)));
   x1:=x0-fx0/f1x0;
   fx1:=x1+sqrt(x1)+exp(ln(x1)/3)-2.5;
   if abs(fx1)>eps
   then
   x0:=x1;
   n:=n+1;
   until n>k;
   writeln ('x1= ',x1:3:6,' n= ',n);
end.
```

```
x0,eps,k
0.7 0.001 10
x1  0.737337 n  11
```

Пакет Excel

	A	B	C	D	E	F
1		Метод Ньютона				
2	x	f(x)	f'(x)	|f(x)|<ε		ε= 0,001
3	0,7	-0,07544	2,020426			
4	0,737337	-0,00056	1,990702	корень		

Пакет MathCAD

$f(x) := x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - 2.5$

$f1(x) := \frac{d}{dx}f(x)$

$i := 0..3$

$x_0 := 0.7$

$x_{i+1} := x_i - \frac{f(x_i)}{f1(x_i)}$

i =	x_i =	$f(x_i)$ =
0	0.7	-0.075
1	0.737	$-5.625\cdot10^{-4}$
2	0.738	$-3.05\cdot10^{-8}$
3	0.738	0

4. Анализ результатов

Сводная таблица результатов

Метод/Среда	Pascal	Excel	MathCAD
Половинного деления	0,737891	0,73789	0,738
Ньютона	0,737337	0,737377	0,738
Последовательных приближений	0,737718	0,73772	0,738

Как видно из выше представленной таблицы более точные результаты корня получены в средах Excel и Pascal, хотя сам процесс уточнения был более прост и быстр в среде MathCAD. В среде MathCAD уже заложены специальные формулы, которые позволяют найти более точное значение уже со второго приближения. В среде Pascal, к примеру, в методе последовательных приближений, потребовалось 10 приближений, а в методе Ньютона число приближений равняется 11. Уточнение корня напрямую зависит от точности его нахождения ε, чем меньше, тем точнее будет корень.

Варианты заданий

№ Задания	Уравнение
1	$0.25x^3 + x - 1.2502 = 0$
2	$3sin\sqrt{x} + 0.35x - 3.8 = 0$
3	$x + \sqrt{x} + \sqrt[5]{x} - 2.5 = 0$
4	$0.1x^2 - x\ln x = 0$
5	$\sqrt{(1 - 0.3x^3)} = 0$
6	$3x - 4\ln x - 5 = 0$
7	$cos\frac{2}{x} - 2sin\frac{1}{x} + \frac{1}{x} = 0$
8	$\sqrt{(1 - 0.4x^2)} - arcsinx = 0$
9	$e^x - e^{-x} - 2 = 0$
10	$e^x + \ln x - 10x = 0$
11	$sin\ln x - cos\ln x + 2\ln x = 0$
12	$x - 2 + sin\frac{1}{x} = 0$
13	$1 - x + sinx - \ln(1 + x) = 0$
14	$3x - 14 + e^x \cdot e^{-x} = 0$
15	$\sqrt{(1 - x)} - tgx = 0$
16	$3\ln x^2 + 6\ln x - 5 = 0$
17	$sinx^2 + cosx^2 - 10x = 0$
18	$x^2 - \ln(1 + x) - 3 = 0$
19	$2xsinx^2 - cosx = 0$
20	$e^x + \sqrt{(1 + e^{2x})} - 2 = 0$

Список рекомендуемой литературы

1. Бахтиярова Л.Н. Microsoft Office 2007 Часть 1. Учебно-методическое пособие. – Н.Новгород: ВГИПУ.2008. – 133с.
2. Груздева М.Л., Червова А.А.Экономические и инженерные расчёты в среде MathCad. Учебное пособие. – Н.Новгород: ВГИПУ. – 2007. – 90с.
3. Ершов В.Н. Численные методы. Учебно-методическое пособие. – Н.Новгород: ВГИПУ. – 2009. – 49с.

Содержание

Введение 3
1.Постановка задачи 4
2.Методы отделения корней 5
2.1.Графический метод 5
2.2Аналитический метод 7
3.Методы уточнения корней 8
3.1.Метод половинного деления 8
3.2.Метод последовательных приближений 10
3.3.Метод Ньютона 12
4.Анализ результатов 16
Варианты заданий 17
Список рекомендуемой литературы 18

В.Н. ЕРШОВ

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ В РАЗЛИЧНЫХ СРЕДАХ ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

Методические рекомендации к выполнению курсовой работы по информатике для студентов специальности 080801.65 – Прикладная информатика (в менеджменте)

Редактор А.В.Чанчина
Корректор Е.М. Кузьмина
Технический редактор Л.М.Бывшева

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета университета

Сдано в набор 25.02.2010 Подписано в печать 25.02.2010
Формат 60/84х8 Усл.печ.л.1,3 Тираж 500 экз. Заказ 72
Издательство ВГИПУ, 603002, Н.Новгород, ул. Луначарского, 23
Отпечатано в отделе полиграфии ВГИПУ
603004, Нижний Новгород, ул. Челюскинцев, 9